ECOLE POLYTECHNIQUE **OPTION M'**

CONCOURS D'ADMISSION 1994

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Ce problème est consacré à l'étude de diverses équations différentielles définies à partir de l'opérateur différentiel $A = \frac{d^2}{dx^2} + \operatorname{cotg} x \frac{d}{dx}$.

On note Ω le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble $\pi\mathbb{Z}$. Pour tout entier k positif ou nul, on désigne par E_k^p (resp. E_k^i) l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, réelles, de classe C^k, 2π-périodiques et paires (resp. impaires). On désigne par sin, cos, tg, cotg les fonctions trigonométriques usuelles.

I

1.) Soit f une fonction de E_1^i ; vérifier que f est nulle sur $\pi\mathbb{Z}$ et que la fonction $x \mapsto f(x) \operatorname{cotg} x$, définie sur Ω, se prolonge de façon unique en une fonction de E_0^p. Cette dernière fonction sera notée $f\,\mathrm{cotg}$ dans tout le problème ; on précisera sa valeur en un point $m\,\pi$, où $m \in \mathbb{Z}$.

2. a) Soit f une fonction de E_k^p (resp. E_k^i) où $k \geqslant 1$; vérifier que f' appartient à E_{k-1}^i (resp. E_{k-1}^p) et que l'on a $\int_0^{2\pi} f'(x)\,dx = 0$.

b) Réciproquement, étant donnée une fonction g de E_{k-1}^i ou E_{k-1}^p, vérifiant $\int_0^{2\pi} g(x)\,dx = 0$, déterminer les fonctions f de E_k^p ou E_k^i admettant g pour dérivée.

II

On désigne par A l'application linéaire $E_2^p \to E_0^p$ définie par

$$A(f) = f'' + f' \operatorname{cotg} \quad .$$

3. a) Préciser la valeur de $A(f)$ en un point $m\,\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

b) Etablir une relation simple entre $A(f)$ sin et f' sin.

c) Déterminer le noyau de A.

d) Calculer $\int_0^{\pi} A(f)(x) \sin x\,dx$.

4.) Etant donnée une fonction $h \in E_0^p$ telle que $\int_0^\pi h(x) \sin x \, dx = 0$, montrer qu'il existe une unique fonction $f \in E_2^p$ vérifiant $f(0) = 0$ et $A(f) = h$, et que f est donnée par

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{\sin y} \int_0^y h(u) \sin u \, du \right) dy \quad .$$

On justifiera cette écriture.

5.) On considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de E_2^p ; on suppose que cette suite converge simplement vers une fonction f et que la suite $(A(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction h. Montrer que f appartient à E_2^p et que $A(f) = h$.

6.) Soit f une fonction de E_2^p, ξ (resp. η) un point de $[0, \pi]$ où f atteint son maximum (resp. minimum). Déterminer les signes de $A(f)(\xi)$ et de $A(f)(\eta)$.

III

Dans cette partie, on s'intéresse au problème suivant : étant donné un réel $\mu > 0$ et une fonction h, étudier les fonctions f de E_2^p vérifiant l'équation différentielle

(1) $$(A - \mu I)(f) = h \quad .$$

Pour toute fonction ϕ bornée sur $\mathbb{R}$ on posera $\| \phi \| = \sup_{t \in \mathbb{R}} | \phi(x) |$.

7.) On fixe f dans E_2^p et on pose $h = (A - \mu I)(f)$. Comparer $\|f\|$ et $\frac{1}{\mu} \|h\|$.
[On pourra introduire le maximum et le minimum de f]

8.) Pour tout entier $n \geq 0$, on note P_n le sous-espace vectoriel de E_2^p engendré par les fonctions $x \mapsto \cos kx$ où $k = 0, 1, ..., n$.

a) Déterminer l'image de P_n par $A - \mu I$.

b) En déduire, à l'aide du **5.**, que pour toute fonction $h \in E_1^p$, l'équation (1) admet une solution unique dans E_2^p.

IV

On examine ici l'équation (1) dans un cas où $\mu < 0$.

9.) On note f une fonction de E_2^p vérifiant $(A + 2I)(f) = 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est identiquement nulle sur un voisinage de 0.
[On pourra introduire un réel $\alpha > 0$ tel que $|f(x)| \leq |f(\alpha)|$ pour tout $x \in [0, \alpha]$, puis majorer $|f(\alpha)|$ à l'aide de la formule du **4.**]

10.) Trouver une fonction f_0 de E_2^p vérifiant $f_0(0) = 1$ et $(A + 2I)(f_0) = 0$.

11.) Déterminer le noyau de $A + 2I$.

12.) Donner la dimension de l'espace des solutions de l'équation $(A + 2I)(f) = 0$ dans l'espace de toutes les fonctions de classe C^2 sur l'intervalle $]0, \pi[$; expliciter ces solutions et déterminer leur limite en 0.

V

Dans cette cinquième partie, on se donne un réel $a > 0$ et une fonction $h \in E_1^p$ vérifiant $h(x) > 0$ pour tout x et on étudie les fonctions f de E_2^p vérifiant l'équation différentielle

$$A(f) + a = h\, e^f \quad . \tag{2}$$

Dans ce but, on fixe deux réels m et M vérifiant $m \leqslant M$ et $h(x)\, e^m \leqslant a \leqslant h(x)\, e^M$ pour tout x, puis un troisième réel $\mu > 0$. On définit par récurrence des fonctions ϕ_k de E_2^p de la façon suivante : $\phi_0(x) = m$ pour tout x, et ϕ_{k+1} est l'unique élément de E_2^p vérifiant

$$(A - \mu I)(\phi_{k+1}) = h\, e^{\phi_k} - a - \mu\, \phi_k \quad .$$

13. a) Montrer que l'on a $\phi_1(x) \geqslant m$ pour tout x.

b) Déterminer un réel μ_0 tel que, si $\mu \geqslant \mu_0$, pour tout x, la suite $(\phi_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ soit croissante et majorée par M.

14. a) Démontrer que la suite $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction ϕ.

b) En déduire l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2) dans E_2^p.

♦ ♦
♦